Problemi di Fisica

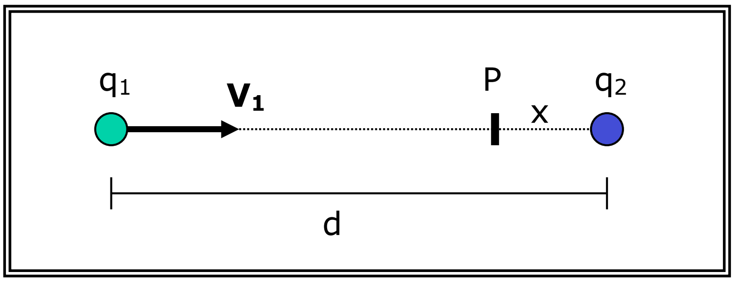
ELETTROMAGNETISMO

Il potenziale elettrico

Problema

Una piccola sfera di plastica di masse m = 3g e carica elettrica q_1 = +2μC viene lanciata, alla velocità v_1=4 m/s, contro una sfera metallica ferma avente carica elettrica q_2 = + 4μC. E distante d=4m. Determinare la distanza tra le due sfere nel punto di massimo avvicinamento.

Soluzione



Le due cariche, avendo lo stesso segno, tendono a respingersi; però la carica q_1, avendo un'energia cinetica, riesce a vincere la forza repulsiva e quindi si avvicina alla carica q_2 fino alla posizione P, che rappresenta il punto di massimo avvicinamento. Poiché la forza elettrica è conservativa, l'energia totale del sistema si conserva durante il movimento:

$$E_C + U = \text{costante} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + K\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d} = K\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{x}$$

Sostituendo i dati del problema, otteniamo una equazione di 1° grado dove l'incognita è proprio la posizione di massimo avvicinamento:

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 16 + 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}}{4} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}}{4} \Rightarrow 0{,}024 + 0{,}018 = \frac{0{,}072}{x} \Rightarrow$$

$$0{,}042x = 0{,}072 \Rightarrow x = \frac{0{,}072}{0{,}042} = 1{,}7\text{m}$$

Problema

Due elettroni distano 2 m. Un altro elettrone, lanciato dall'infinito, si ferma a metà strada tra essi. Quale deve essere la sua velocità iniziale?

Soluzione

Per il principio di conservazione, l'energia meccanica dell'elettrone proveniente dall'infinito (cinetica + potenziale), si conserva:

$$E_C + U = \text{costante} \qquad \text{ossia:} \qquad E_{Ci} + U_i = E_{Cf} + U_f$$

Poiché l'elettrone proviene dall'infinito, la sua energia potenziale iniziale è nulla; mentre, poiché si ferma a metà strada tra i due elettroni, la sua energia cinetica finale è nulla. Pertanto, il principio di conservazione diventa:

$$E_{Ci} = U_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = K\cdot\left(\frac{e^2}{d/2}+\frac{e^2}{d/2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = K\cdot\frac{4e^2}{d}$$

da cui è possibile ricavare l'incognita v_i:

$$v_i = \sqrt{\frac{8Ke^2}{md}} = \sqrt{\frac{8\cdot 9\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{9{,}108\cdot 10^{-31}\cdot 2}} = 32\,\text{m/s}$$

Problema

In un campo elettrico, per trasportare una particella da un punto A a un punto B fra i quali esiste una differenza di potenziale $V_{AB} = 3{,}0\cdot 10^5$ V, la forza del campo elettrico compie un lavoro $L = 4{,}8\cdot 10^{-14}$ J. Supponendo che sulla particella non agiscano altre forze diverse da quella elettrica, determinare:

- la carica della particella
- l'aumento dell'energia cinetica

Soluzione

Dalla definizione di differenza di potenziale ricaviamo il valore della carica della particella:

$$V_{AB} = \frac{L}{q} \Rightarrow q = \frac{L}{V_{AB}} = \frac{4{,}8\cdot 10^{-14}}{3{,}0\cdot 10^5} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Attraverso l'ausilio del teorema dell'energia cinetica determiniamo l'aumento dell'energia cinetica della carica:

$$\Delta E = L = 4{,}8\cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

Problema

12 elettroni sono posti ugualmente distanziati su un cerchio di raggio R = 1 mm . Rispetto a V = 0 all'infinito (preso come livello di zero per il potenziale):

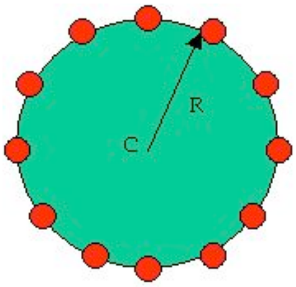
1. che valore hanno il potenziale elettrico ed il campo elettrico nel centro C del cerchio

2. discutere qualitativamente la situazione per quanto riguarda il potenziale elettrico ed il campo elettrico in C nel caso in cui gli elettroni fossero disposti lungo il cerchio in maniera non uniforme.

Soluzione

1. Poiché tutti gli elettroni hanno la stessa carica negativa e tutti sono disposti alla stessa distanza R dal centro, il potenziale nel punto C, con l'ausilio del principio di sovrapposizione, è:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=}^{n}\frac{q_i}{r_i} = -12 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{R} = -12 \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{-3}} = -173 \cdot 10^{-7}\,V$$



(1)

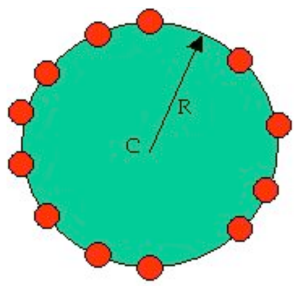
Poiché il potenziale elettrico è uno scalare, l'orientamento di ciascuna carica rispetto a C è irrilevante per il potenziale V.

Al contrario, poiché il campo elettrico è un vettore, l'orientamento degli elettroni è importante per la determinazione di E.

Infatti, il vettore campo elettrico nel punto C, dovuto ad un certo elettrone, a causa della disposizione simmetrica viene annullato dal vettore campo elettrico dovuto all'elettrone che si trova diametralmente opposto. Per cui nel punto C:

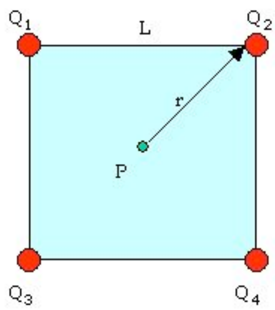
$$E = 0$$

2. Se gli elettroni fossero spostati lungo il cerchio fino ad avere una distribuzione disuniforme, il potenziale sarebbe sempre lo stesso in quanto ogni elettrone ha sempre la stessa distanza da C e, come abbiamo detto, l'orientamento è irrilevante. Invece, il campo elettrico, sempre per ciò che abbiamo detto, non è più nullo in quanto la disposizione degli elettroni non è più simmetrica. Pertanto esisterà un campo elettrico netto risultante diretto verso la maggiore distribuzione di cariche.



(2)

Problema



Calcolare il potenziale elettrico nel punto P al centro di un quadrato di lato L = 1,3 m e sui cui vertici sono collocate quattro cariche puntiformi:

$Q_1 = +12\ nC \quad Q_2 = -24\ nC \quad Q_3 = +31\ nC \quad Q_4 = +17\ nC$

Soluzione

Poiché tutte le cariche hanno la stessa distanza r dal punto P, il potenziale nel punto P, con l'ausilio del principio di sovrapposizione, deve essere:

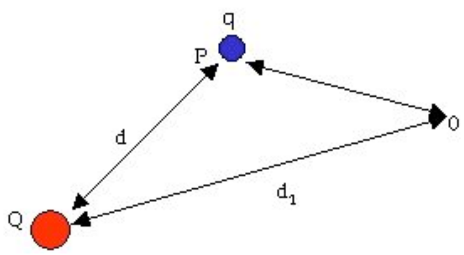
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=}^{n}\frac{q_i}{r_i} = 9\cdot10^9\cdot\frac{(12-24+31+17)\cdot10^{-9}}{0{,}92} = 352V$$

dove: $r = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}3}{\sqrt{2}} = 0{,}92\,m$

Problema

Calcolare il potenziale del campo elettrico di una carica Q = 2,0 μC nel punto P distante 1,0 m. Quanto vale il lavoro compiuto contro le forze del campo per spostare una carica q = -1,0 μC dal punto P al punto O che dista 2,0 m da Q.

Soluzione



Applicando la definizione di potenziale elettrico di una carica puntiforme otteniamo:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{d} = 9\cdot10^9\cdot\frac{2{,}0\cdot10^{-6}}{1} = 18\cdot10^3\ V$$

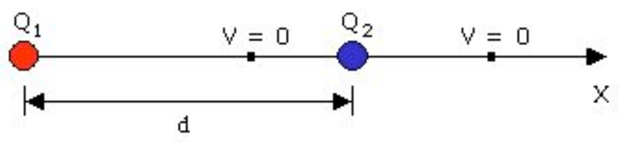
Per trovare il lavoro, possiamo eseguire lo stesso ragionamento applicato al campo gravitazionale terrestre ponendo le cariche in luogo delle masse e la costante K in luogo di quella gravitazionale:

$$L = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}\right) = 9\cdot10^9\cdot2{,}0\cdot10^{-6}\cdot1{,}0\cdot10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) = 9\cdot10^{-3}\ J$$

Problema

Le cariche elettriche puntiformi Q_1 = -40,0 nC e Q_2 = +20,0 nC sono separate da una distanza d = 10,0 m. Determinare sulla retta passante per le due cariche i punti in cui il potenziale elettrico è nullo.

Soluzione



Tenendo presente la definizione di potenziale elettrico di una carica puntiforme:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad (1)$$

notiamo che $V_1 < 0$ in quanto Q_1 è negativa e $V_2 > 0$ in quanto Q_2 è positiva.

Pertanto il potenziale totale V, che per il principio di sovrapposizione è la somma algebrica dei singoli potenziali V_1 e V_2, sarà nullo nei punti in cui V_1 e V_2 sono uguali in valore assoluto.

Il potenziale V non si può annullare in nessun punto alla sinistra della carica Q_1 in quanto in questi punti V_1 è sempre maggiore di V_2 visto che dai dati del problema Q_1 è maggiore di Q_2 e dalla (1) il potenziale è direttamente proporzionale alla carica ed inversamente proporzionale alla distanza.
Pertanto il potenziale si potrà annullare solo nei punti più vicini a Q_2, e cioè nei punti compresi tra le due cariche e a sinistra di Q_2.

Indichiamo con x l'ascissa di un punto a potenziale nullo e supponiamo che si trovi a destra di Q_2 e applichiamo, quindi, il principio di sovrapposizione:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{x-d} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{x} + \frac{Q_2}{x-d} = 0$$

da cui, risolvendo rispetto ad x si ha:

$$x = \frac{d \cdot Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{10{,}0 \cdot (-40{,}0 \cdot 10^{-9})}{(-40{,}0 + 20{,}0) \cdot 10^{-9}} = 20{,}0 \text{ m}$$

Vediamo se esiste anche tra le due cariche un punto a potenziale nullo. Indichiamo ancora con x l'ascissa di tale punto e applichiamo di nuovo il principio di sovrapposizione:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{d-x} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{x} + \frac{Q_2}{d-x} = 0$$

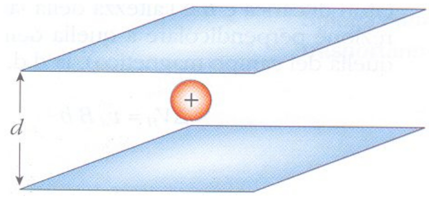
da cui, risolvendo rispetto ad x si ha:

$$x = \frac{-d \cdot Q_1}{-Q_1 + Q_2} = \frac{-10{,}0 \cdot (-40{,}0 \cdot 10^{-9})}{(40{,}0 + 20{,}0) \cdot 10^{-9}} = 6{,}67 \text{ m}$$

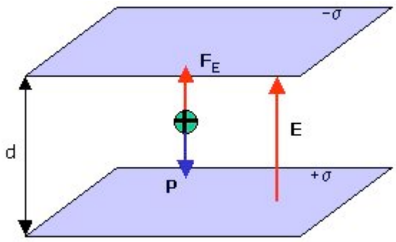
In definitiva esistono due punti a potenziale nullo sulla retta passante per le due cariche.

Problema

Una gocciolina d'olio di densità ρ = 0,822 g/cm^3, con carica q = 6,40·10^{-19} C e raggio r = 3,00·10^{-5} cm, viene posta fra due placche distanti fra loro d = 5,00 mm. Calcolare la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinchè la goccia rimanga in equilibrio.



Soluzione



La goccia rimane in equilibrio se la forza peso **P**, diretta verso il basso, viene equilibrata dalla forza elettrica **F**$_E$, diretta verso l'alto. Affinché ciò avvenga, le placche devono essere caricate come in figura e quindi il campo elettrico **E** diretto dalla placca positiva a quella negativa. Dalla condizione di equilibrio calcoliamo il modulo del campo elettrico:

$$F_E = P \Rightarrow qE = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{q} = \frac{93 \cdot 10^{-18} \cdot 9{,}81}{6{,}40 \cdot 10^{-19}} = 1430\,V/m = 1{,}43\,kV/m$$

dove:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3{,}00 \cdot 10^{-5})^3 = 113 \cdot 10^{-15}\,cm^3 = 113 \cdot 10^{-24}\,m^3$$

$$m = \rho \cdot V = 0{,}822 \cdot 113 \cdot 10^{-15} = 93 \cdot 10^{-15}\,g = 93 \cdot 10^{-18}\,kg$$

Noto il campo elettrico, la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinchè la goccia rimanga in equilibrio è dato da:

$$V = Ed = 1{,}43 \cdot 10^3 \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-3} = 7{,}15\,V$$

Problema

Due lastre parallele e cariche di segno opposto distano fra loro 3,0 cm (figura esercizio precedente). Fra le due lastre una particella q=2,0x10^{-15}C e massa m=1,5x10^{-12}kg è in equilibrio elettrostatico. Calcolare la differenza di potenziale fra le lastre.

Soluzione

La forza-peso $\vec{F}_p$ e la forza elettrica $\vec{F}_{el}$ esercitate sulla particella sono uguali in intensità e direzione e opposte in verso. Essendo

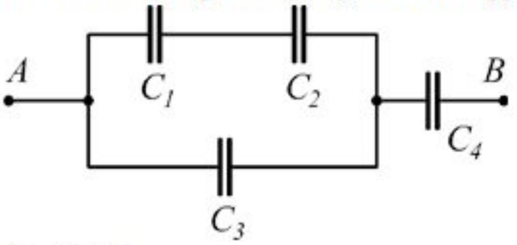
$$F_{el} = qE = q\frac{\Delta V}{d} \quad \text{e} \quad F_p = mg,$$

per la particella carica in equilibrio vale la relazione $mg = q\frac{\Delta V}{d}$, da cui segue:

$$\Delta V = \frac{mgd}{q} = \frac{(1{,}5 \times 10^{-12}\ \text{kg}) \times (9{,}8\ \text{m/s}^2) \times (3{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m})}{2{,}0 \times 10^{-15}\ \text{C}} = 2{,}2 \times 10^2\ \text{V}.$$

Problema

Calcola la capacità equivalente vista tra i morsetti A e B del circuito di figura e la carica totale dell'armatura equivalente quando sia applicata una tensione VAB=120V



C_1=160pF

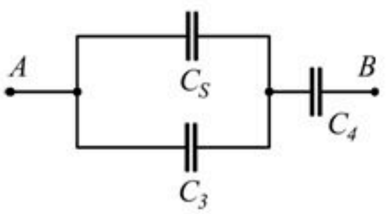
C_2=0,2nF

C_3=21,1pF

C_4=0,25nF

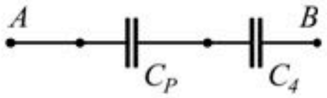
Soluzione

C_1 e C_2 sono in serie, per cui:



$$C_S = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{160\cdot 10^{-12}}+\frac{1}{200\cdot 10^{-12}}} = 88{,}9\,pF$$

Ora C_S si trova in parallelo a C_3, per cui:



$$C_P = C_S + C_3 = (88{,}9 + 21{,}1)\cdot 10^{-12} = 110\,pF$$

La capacità vista tra i morsetti AB è data, infine, dalla serie fra C_P e C_4.

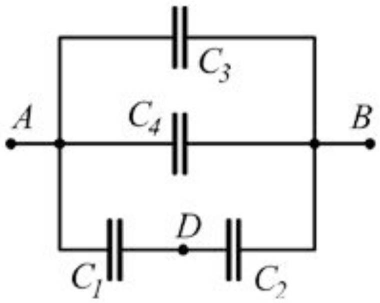
$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_P}+\frac{1}{C_4}} = \frac{1}{\frac{1}{110\cdot 10^{-12}}+\frac{1}{250\cdot 10^{-12}}} = \frac{1}{(9{,}09+4)\cdot 10^{9}} = 76{,}4\,pF$$

Se si applica una tensione V_{AB}=120V si ha una carica q su ciascuna armatura equivalente pari a :

$$q = C_T \cdot V_{AB} = 76{,}4\cdot 10^{-12}\cdot 120 = 9{,}168\cdot 10^{-9}\ C$$

Problema

Nel circuito illustrato, i valori sono:



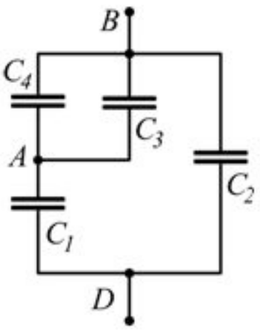
C_1=8μF
C_2=12μF
C_3=20μF
C_4=5μF

Calcola la capacità equivalente, vista fra i nodi A e B e quindi quella vista tra i nodi B e D.

Soluzione

Nel primo caso si hanno tre rami in parallelo tra i pun ti A e B qundi la capacità C_{AB} vale:

$$C_{AB} = C_3 + C_4 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 20 + 5 + \frac{8\cdot 12}{8+12} = 29{,}8\ \mu F$$



Nel secondo caso conviene ridisegnare il circuito come illustrato in figura seguente:

da cui si deduce:

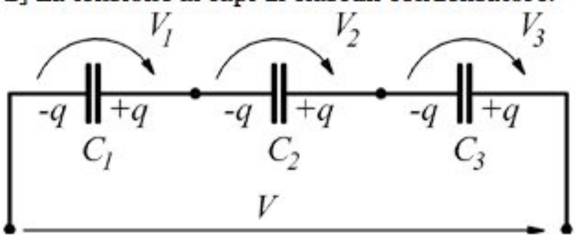
$$C_{BD} = \frac{(C_3 + C_4)\cdot C_1}{C_3 + C_4 + C_1} + C_2 = \frac{(20+5)\cdot 8}{20+5+8} + 12 = 18\ \mu F$$

Problema

Tre condensatori di rispettiva capacità C_1=90pF C_2=25pF C_3=0,04nF sono collegati in serie e sottoposti alla tensione V=220V. Calcola:

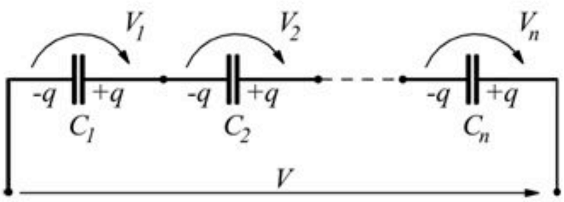
1] La quantità di carica q su ciascuna armatura.

2] La tensione ai capi di ciascun condensatore.



Soluzione

Sappiamo che per n condensatori in serie valgono le regole:



È in tal caso:

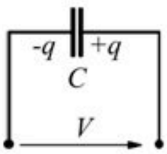
$$V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V_n = \frac{q}{C_n}$$

$$V = V_1 + V_2 + ..V_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + .. + \frac{q}{C_n} = q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + .. + \frac{1}{C_n} \right)$$

il termine $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + .. + \frac{1}{C_n}$

restituisce la capacità equivalente di n condensatori messi in serie fra loro.

Come si nota i tre condensatori in serie possono essere ricondotti ad un unico condensatore C



$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{90} + \frac{1}{25} + \frac{1}{40}} = 13{,}13\text{pF}$$

con $q = CV = 13{,}13 \cdot 10^{-12} \cdot 220 = 2890{,}5 \; pC$ poi avremo:

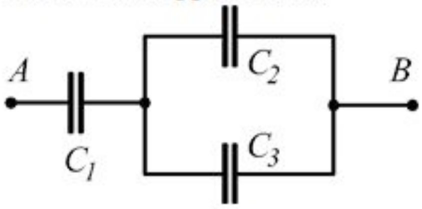
$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{2890{,}5 \cdot 10^{-12}}{90 \cdot 10^{-12}} = 32{,}11 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{2890{,}5 \cdot 10^{-12}}{25 \cdot 10^{-12}} = 115{,}62 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{2890{,}5 \cdot 10^{-12}}{40 \cdot 10^{-12}} = 72{,}26 \text{ V}$$

Problema

Nel circuito rappresentato:



i dati sono i seguenti:

$C_1=3\mu F$

$C_2=2\mu F$

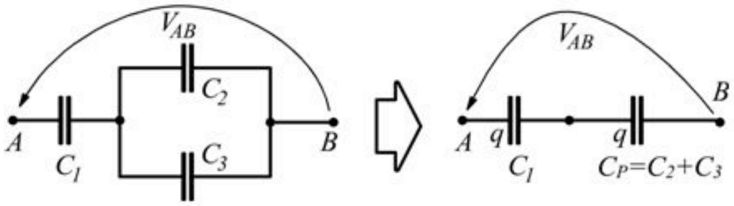
$C_3=4\mu F$

$V_{AB}=300V$

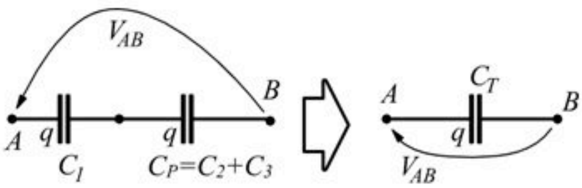
Calcola la tensione e la carica elettrica su ogni singolo componente.

Soluzione

Il parallelo fra C_2 e C_3 produce la capacità equivalente $C_P = C_2 + C_3 = 2 + 4 = 6\mu F$



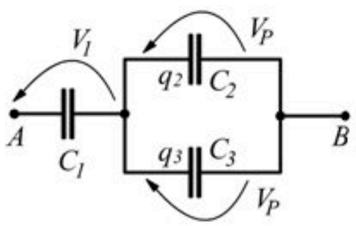
La serie C_1-C_P produce la capacità equivalente $C_T = \dfrac{C_1 C_P}{C_1 + C_P} = \dfrac{3 \cdot 6}{3+6} = \dfrac{18}{9} = 2\mu F$



poi dobbiamo constatare che $q = C_T V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 300 = 600\ \mu C$ ovviamente; $q=q_1$

la stessa carica è ai capi di C_1: $q_1 = C_1 V_1 \quad => \quad V_1 = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{600 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 200\ V$

con $q=q_p$ carica elettrica accumulata ai capi di C_P: $V_P = \dfrac{q_P}{C_P} = \dfrac{600 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 100\ V$



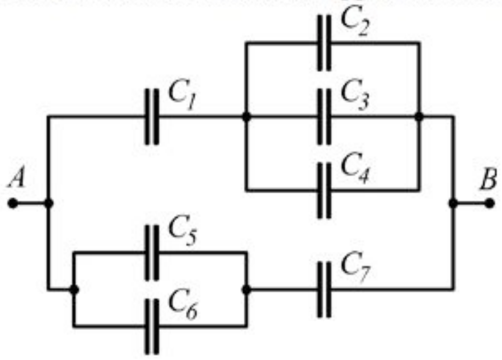
Ovviamente le due capacità in parallelo avranno la stessa tensione V_P ai loro capi.

$q_2 = C_2 V_P = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 200\ \mu C$

$q_3 = C_3 V_P = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 400\ \mu C$

Problema

Nel sistema di condensatori rappresentato con:



$C_1=12\mu F$

$C_2=1\mu F$

$C_3=2\mu F$

$C_4=3\mu F$

$C_5=4\mu F$

$C_6=5\mu F$

$C_7=18\mu F$

$V_{AB}=120V$

1] Calcolare la capacità equivalente fra i morsetti A e B.

2] La carica accumulata su ogni condensatore.

3] La tensione elettrica ai capi di ogni condensatore.

Soluzione

C_5 e C_6 sono in parallelo: $C_{56}=C_5+C_6=4+5=9\mu F$; questo condensatore è in serie con C_7:

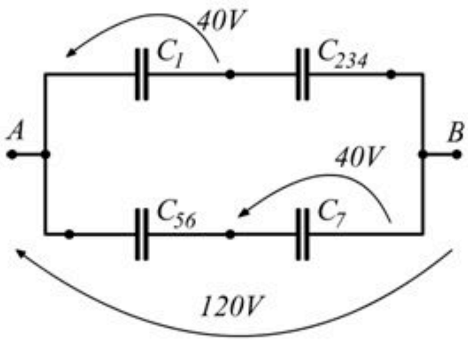
$$C_{567}=\frac{C_7\cdot C_{56}}{C_7+C_{56}}=\frac{9\cdot 18}{9+18}=6\mu F$$ sull'altro ramo, c'è il parallelo fra C_2-C_3-C_4:

$C_{234}=C_2+C_3+C_4=1+2+3=6\mu F$ poi facciamo la serie di C_1 con C_{234}:

$$C_{1234}=\frac{C_1\cdot C_{234}}{C_1+C_{234}}=\frac{12\cdot 6}{12+6}=4\mu F$$ la capacità totale: $C_{AB}=C_{1234}+C_{567}=4+6=10\mu F$

$$q_{AB}=C_{AB}V=10\cdot 10^{-6}\cdot 120=1200\ \mu C$$
$$q_{567}=C_{567}V=6\cdot 10^{-6}\cdot 120=720\ \mu C=q_7$$
$$q_{1234}=C_{1234}V=4\cdot 10^{-6}\cdot 120=480\ \mu C=q_1$$

$$V_7=\frac{q_7}{C_7}=\frac{720\cdot 10^{-6}}{18\cdot 10^{-6}}=40\ V \qquad V_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{480\cdot 10^{-6}}{12\cdot 10^{-6}}=40\ V$$



Come si nota dalla figura la tensione ai capi del condensatore equivalente C_{234} deve necessariamente essere di 80V quindi: $V_2=V_3=V_4=80V$.

In modo analogo si può affermare che $V_5=V_6=80V$.
Passiamo ora a calcolare la quantità di carica accumulata su ogni armatura:

$$q_2=C_2V_2=1\cdot 80=80\ \mu C$$

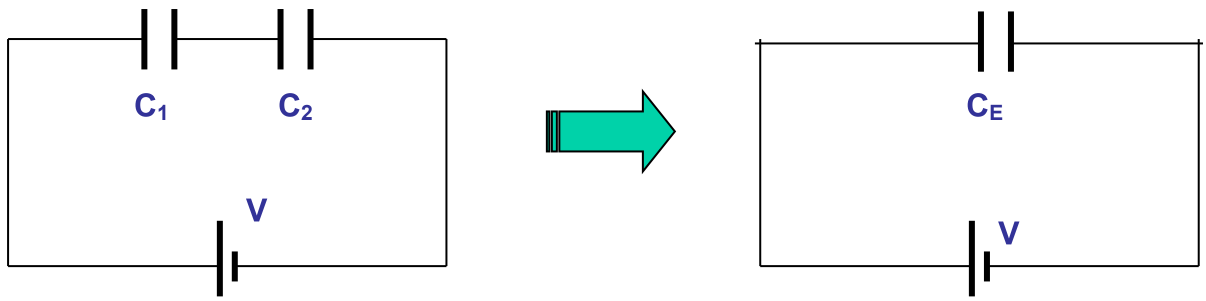
$$q_3=C_3V_3=2\cdot 80=160\ \mu C \qquad q_4=C_4V_4=3\cdot 80=240\ \mu C$$

$$q_5=C_5V_5=4\cdot 80=320\ \mu C \qquad q_6=C_6V_6=5\cdot 80=400\ \mu C$$

Problema

Due condensatori di capacità 3 μF e 6 μF rispettivamente sono connessi in serie ed il sistema così ottenuto è caricato a 500 V. Calcolare la carica su ciascuna armatura e l'energia immagazzinata da ciascun condensatore.

Soluzione



Poiché i condensatori sono in serie, sulle loro armature si accumulerà una stessa carica, che è la stessa che si accumula sul condensatore equivalente:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0,5 \Rightarrow C_E = \frac{1}{0,5} = 2\mu F$$

$$Q = C_E \cdot V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 500 = 1000 \cdot 10^{-6} C = 10^{-3} C$$

L'energia immagazzinata da ciascun condensatore, sotto forma di energia elettrica, non è altro il lavoro speso dal generatore per caricare i singoli condensatori:

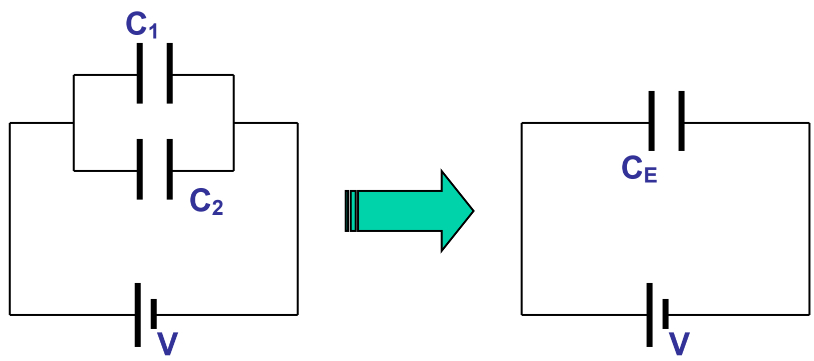
$$E_1 = L_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10^{-3})^2}{3 \cdot 10^{-6}} = 0,17J$$

$$E_2 = L_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10^{-3})^2}{6 \cdot 10^{-6}} = 0,08J$$

Problema

Due condensatori di capacità 4μF e 8μF collegati in parallelo sono caricati con una differenza di potenziale di 100 V. Determinare la carica accumulata sulle armature di ciascun condensatore e l'energia immagazzinata dal sistema.

Soluzione



I due condensatori, essendo in parallelo, sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale V, per cui la carica accumulata su di essi è data da:

$$Q_1 = C_1 \cdot V = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 4 \cdot 10^{-4} C$$
$$Q_2 = C_2 \cdot V = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 8 \cdot 10^{-4} C$$

Per calcolare l'energia immagazzinata dal sistema, dobbiamo prima calcolare la capacità equivalente, che nel caso di condensatori in parallelo è data da:

$$C_E = C_1 + C_2 = 4 + 8 = 12\mu F$$

per cui:

$$E = L = \frac{1}{2} C_E V^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 6 \cdot 10^{-2} J$$

Ricorda: l'energia immagazzinata dal sistema sotto forma di energia elettrica è il lavoro speso dal generatore V per caricare il condensatore equivalente che rappresenta il sistema dei due condensatori.

Problema

Una sfera metallica di 10 cm di raggio è portata al potenziale di $2 \cdot 10^4$ V. Determinare la capacità e la carica della sfera.

Soluzione

Dalla formula del potenziale di un conduttore sferico ricaviamo la carica della sfera:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 \cdot V \cdot R = 4\pi \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 223 \cdot 10^{-9} C$$

La capacità della sfera la calcoliamo attraverso la sua definizione:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{223 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{4}} = 111{,}5 \cdot 10^{-13}F = 11{,}2 \cdot 10^{-12}F = 11{,}2pF$$

Problema

Un condensatore piano ha le armature circolari di raggio 10 cm, distanti tra loro 2 cm, e come dielettrico l'aria. Quanta energia viene immagazzinata dal condensatore se è caricato con una differenza di potenziale (d.d.p.) uguale a 1000 V?

Soluzione

L'energia immagazzinata da un condensatore è data da:

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$

e per calcolarla dobbiamo prima determinare il valore della capacità. Poiché il problema fornisce le caratteristiche geometriche e fisiche del condensatore, allora la capacità la calcoliamo come:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 13{,}9 \cdot 10^{-12}F = 13{,}9pF$$

dove:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-2}m^2$$

In definitiva:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 13{,}9 \cdot 10^{-12} \cdot 1000^2 = 7 \cdot 10^{-6}J$$

Problema

Un condensatore piano , con le armature di superficie 20,0 cm^2 distanti nel vuoto 1,00 mm, viene caricato con una differenza di potenziale di 1000 V.
Calcolare:

1. la carica accumulata sulle armature
2. l'energia immagazzinata
3. la densità di energia del campo elettrico

Soluzione

1. Poiché sono note le caratteristiche fisiche e geometriche del condensatore, possiamo calcolare la sua capacità:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{20{,}0 \cdot 10^{-4}}{1{,}00 \cdot 10^{-3}} = 17{,}7 \cdot 10^{-12} F = 17{,}7 pF$$

Dalla definizione di capacità ricaviamo la formula per calcolare la carica accumulata sulle armature:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V = 17{,}7 \cdot 10^{-12} \cdot 1000 = 17{,}7 \cdot 10^{-9} C = 17{,}7 nC$$

2. Il lavoro speso per caricare il condensatore è immagazzinato sotto forma di energia potenziale elettrica, per cui:

$$E = L = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \cdot 17{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 1000 = 8{,}85 \cdot 10^{-6} J = 8{,}85 \mu J$$

3. Poiché fra le armature del condensatore esiste un campo elettrico che si annulla quando il condensatore si scarica, possiamo anche pensare che l'energia spesa dal generatore per caricare il condensatore venga immagazzinata nel campo elettrico. Pertanto possiamo parlare di densità di energia del campo elettrico, che calcoliamo nel seguente modo:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot (10^6)^2 = 4{,}43 J/m^3$$

dove il campo elettrico è dato da:

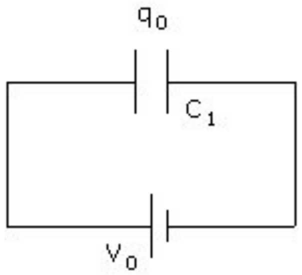
$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000}{1{,}00 \cdot 10^{-3}} = 10^6 V/m$$

Problema

Un condensatore C_1 = 3,55 μF viene caricato a una differenza di potenziale V_0 = 6.30 V, utilizzando una batteria da 6.30 V. La batteria viene poi rimossa e il condensatore viene connesso a un secondo condensatore C_2 = 8,95 μF.

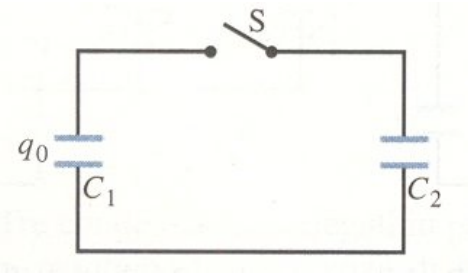
1. Cosa succede dopo che l'interruttore S è stato chiuso? una certa carica scorre da C_1 a C_2 fino a che non si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i condensatori presentano la stessa differenza di potenziale V.
2. Qual è la differenza di potenziale comune?

Soluzione



1. Dopo che il condensatore C_1 si è caricato ed è poi connesso al condensatore C_2, una certa carica scorre da C_1 a C_2 fino a che non si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i condensatori presentano la stessa differenza di potenziale V.

2. La carica iniziale q_0 viene condivisa dai due condensatori in modo che si ottiene l'equazione:



$$q_0 = q_1 + q_2$$

Facendo uso della relazione q = CV per ciascun termine di questa equazione si ha:

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V$$

che risolta ci consente di ottenere il valore del potenziale comune ai due condensatori:

$$V = V_0 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 6{,}30 \cdot \frac{3{,}55}{3{,}55 + 8{,}95} = 1{,}79J$$

Problema

Un condensatore C = 2μF è caricato con una differenza di potenziale V_i = 200 V. Esso, dopo il distacco dal generatore, viene collegato in parallelo ad un condensatore C = 6μF, inizialmente scarico.
Calcolare:

1. la differenza di potenziale V_f ai capi dei due condensatori in parallelo
2. la variazione di energia elettrostatica.

Soluzione

1. Quando i due condensatori vengono collegati in parallelo il sistema ha una capacità:

$$C_p = C_1 + C_2$$

Nell'operazione di collegamento la carica resta inalterata, per cui:

$$Q_{iniziale} = Q_{finale} \Rightarrow C_1 V_i = (C_1 + C_2) V_f$$

dalla quale segue:

$$V_f = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot V_i = \frac{2}{2+6} \cdot 200 = 50\,V$$

2. L'energia elettrostatica iniziale e finale sono:

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_i^2 \qquad U_f = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_f^2$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$U_i = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = 0{,}04\,J \qquad U_f = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2 = 0{,}01\,J$$

Pertanto la variazione di energia elettrostatica è:

$$\Delta U = U_i - U_f = 0{,}04 - 0{,}01 = 0{,}03\,J$$

OSSERVAZIONE - Come era prevedibile, l'energia elettrostatica del sistema è diminuita nel passaggio da una configurazione all'altra, e la variazione di energia si è trasformata in calore, per effetto Joule, nei conduttori che collegano i due condensatori in parallelo.

Problema

Un condensatore è costituito da due armature piane e parallele di superficie S = 80 cm^2 poste a una distanza d = 2 mm. Fra le armature c'è il vuoto. Il condensatore viene caricato portando le sue armature ad una differenza di potenziale V = 100 V. Staccato il condensatore dal generatore, una delle armature viene allontanata finché la distanza fra le armature diventa d_1 = 1 cm. Calcolare:

1. la differenza di potenziale finale V_f fra le armature
2. il lavoro fatto per spostare le armature

Soluzione

1. Durante l'allontanamento delle armature la carica resta costante, per cui:

$$Q_{iniziale} = Q_{finale} \Rightarrow C_i V_i = C_f V_f \quad (1)$$

Siccome le capacità sono date da:

$$C_i = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad C_{fi} = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \quad (2)$$

la (1) diventa:

$$\varepsilon_0 \frac{S}{d} \cdot V_i = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \cdot V_f \Rightarrow \frac{V_i}{d} = \frac{V_f}{d_1}$$

da cui ricaviamo la differenza di potenziale finale fra le armature:

$$V_f = \frac{d_1}{d} \cdot V_i = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 100 = 500\,V$$

2. L'energia elettrostatica iniziale e finale sono:

$$U_i = \frac{1}{2} C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 35{,}4 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2 = 0{,}18 \cdot 10^{-6}\,J = 0{,}18\,\mu J$$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f V_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}08 \cdot 10^{-12} \cdot 500^2 = 0{,}89 \cdot 10^{-6} = 0{,}89\,\mu J$$

dove C_i e C_f sono state calcolate attraverso le (2):

$$C_i = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{80 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 35{,}4 \cdot 10^{-12} F = 35{,}4\,pF$$

$$C_f = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{80 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 7{,}08 \cdot 10^{-12} F = 7{,}08\,pF$$

Il lavoro fatto per spostare le armature è pari alla differenza delle energie potenziali elettrostatiche:

$$L = U_f - U_i = 0{,}89 - 0{,}18 = 0{,}71\,\mu J$$